

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Продвинутые графы
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.Б. Дайняк, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 30.01.2025

Аннотация

Курс включает темы теории графов, часто выходящие за пределы вводных курсов по комбинаторике и теории графов. В частности, рассматриваются достаточно стандартные, но нехарактерные для вводных курсов: списочное хроматическое число, связность, число скрещиваний. Курс демонстрирует понятия и методы, свойственные современным исследованиям по теории графов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение основных понятий теории графов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области графов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области графов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области графов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.2 Имеет практически опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
 современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
 понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
 основные свойства соответствующих математических объектов;
 аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;
 оценивать корректность постановок задач;
 строго доказывать или опровергать утверждение;
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Локальные теоремы Галлаи-Эрдёша о числе вершин	6	6		5
2	Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов	6	6		8
3	Основные определения и понятия	4	4		8
4	Простейшие задачи экстремальной теории графов	4	4		8
5	Связность. Остовное дерево.	4	4		8
6	Трансверсаль в графе и число независимости	6	6		8
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Локальные теоремы Галлаи-Эрдёша о числе вершин

Задача Турана. Теорема Моцкина-Стросса. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.

2. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов

Экстремальная задача о графах без циклов длины 4 и конечные проективные плоскости.

3. Основные определения и понятия

Графические последовательности. Алгоритм определения, графические последовательности и теорема Галлаи-Эрдёша.

4. Простейшие задачи экстремальной теории графов

Число независимости и кликовое число. Теорема Рамсея (напоминание) и (p, q) -свойство. Функция независимости графа. Критерий двудольности и функция независимости. Задачи рамсеевского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.

5. Связность. Остовное дерево.

Различные задачи об остовных деревьях.

6. Трансверсаль в графе и число независимости

Реберные графы и теорема Галлаи о максимальном парасочетании.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретная математика: логика, группы, графы [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / О. Е. Акимов .— 2-е изд., доп. — М. : Лаб. базовых знаний, 2003 .— 376 с
- Графы. Алгоритмы на языке C [Текст] : учеб. пособие для студентов 1 курса МФТИ / В. В. Прут ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2017 .— 213 с. + pdf-версия. - Библиогр.: с. 207-209. - 200 экз. - ISBN 978-5-7417-0633-6 .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ).

Дополнительная литература

1. Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев [и др.] ; М-во образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд. — М. : МФТИ, 2000, 2004 .— 100 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	А.Б. Дайняк, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.2 Имеет практический опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Продвинутые графы» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;
оценивать корректность постановок задач;
строго доказывать или опровергать утверждение;
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих
для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач
и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль

Среди графов ниже отметьте все те, которые являются 2-связными:

простой цикл на 2017 вершинах, полный граф на 2017 вершинах, дерево на 2017 вершинах,
полный двудольный граф $K_{2017,2017}$.

Приведите пример графа, в котором степень каждой вершины не меньше 2017, но при этом граф не является двусвязным.

Сколько дуг в сети, построенной в доказательстве вершинного варианта теоремы Менгера, если в исходном графе было 10 вершин и 30 рёбер?

В доказанной на лекциях теореме утверждается существование цикла, который содержит выбранное множество вершин графа, но ничего не говорится о порядке, в котором вершины должны лежать на цикле. Приведите пример, показывающий, что контролировать порядок мы бы не могли: в общем случае не верно, что для любых вершин v_1, \dots, v_k в k -связном графе найдётся цикл, в котором вершины v_i лежат в точности по порядку, т.е. за v_i идёт v_{i+1} для каждого i .

Постройте для каждого натуральных κ, λ, δ , удовлетворяющих неравенству $\kappa \leq \lambda \leq \delta$, граф, имеющий в точности такие вершинную связность, рёберную связность и минимальную степень соответственно.

Как выглядят деревья, на которых достигается оценка теоремы Брукса.

Размером паросочетания будем называть количество рёбер в нём. Пусть G — произвольный (необязательно двудольный) граф с паросочетаниями M и M' размеров m и m' соответственно, причём $m' < m$. Будем условно называть рёбра паросочетания M синими, а рёбра M' красными (те рёбра графа G , которые одновременно принадлежат обоим паросочетаниям M, M' , не будем раскрашивать). Совершенно аналогично тому, как это делалось в предыдущем видеофрагменте, введём понятие красно-синей максимальной чередующейся (ксмч) цепи. Докажите, что в графе G имеется по меньшей мере $(m' - m)$ ксмч цепей, каждая из которых начинается и заканчивается на красном ребре.

Пусть G — произвольный граф, а M — произвольное паросочетание в нём. Условно покрасим рёбра M в синий цвет, а все остальные рёбра G — в красный цвет. Допустим, что есть ксмч цепь, первое и последнее рёбра которой красные. Покажите, что в этом случае размер паросочетания M можно увеличить.

Пусть G — двудольный граф с равномошными долями, для которого выполнены условия теоремы Холла. Пусть M — паросочетание в G , не являющееся совершенным. Рассмотрев всевозможные ксмч цепи, начинающиеся в вершине, «не покрытой» паросочетанием M , покажите, как можно получить паросочетание, размер которого больше M .

Опишите, что именно может «не заработать», если попытаться доказать теорему Кёнига без изменений переложить с двудольных графов на произвольные.

Докажите, что у k -регулярного графа на нечётном числе вершин хроматический индекс равен $(k+1)$.

Покажите, что теорема Визинга (верхняя оценка) в общем случае не верна для мультиграфов (приведите пример).

Докажите, что хроматический индекс любого $2k$ -регулярного мультиграфа не превосходит $3k$.

Теорему Турана нетрудно перевести с языка клик на язык двойственного понятия независимого множества. Прделайте это и Вы, описав структуру графа, у которого минимально возможное количество рёбер среди графов на $(n \setminus \alpha)$ вершинах с числом независимости α . Описание не должно ссылаться на теорему Турана.

Какой константе (из отрезка $[0, 1]$) асимптотически равна минимальная доля рёбер графа, при которой гарантируется наличие подграфа (необязательно порождённого), изоморфного графу Петерсена?

Докажите, что списочное хроматическое число цикла на чётном числе вершин равно двум.

Докажите, что хроматическое число графа равно k тогда и только тогда, когда можно так сориентировать рёбра графа, чтобы в полученном орграфе максимальная длина цепей равнялась $(k-1)$. [Под длиной цепи подразумевается количество рёбер в ней; все рёбра должны проходиться в правильном направлении; повторений вершин быть не должно.]

Граф называется критическим k -хроматическим, если хроматическое число графа равно k , но хроматическое число любого его подграфа уже не более $(k-1)$. Докажите, что для любого критического k -хроматического графа G выполнено неравенство $|G| \geq k/2$.

Опишите, как устроены критические 3-хроматические графы.

Чему равна величина $\max_{G \text{ планарный}} \chi_1(G)$?

Чему равна величина $\max_{G \text{ планарный}} (\chi_1(G) - \chi(G))$?

Какова минимальная длина цикла в графе Зыкова—Мыцельского G_{2017} ?

Пусть математическое ожидание количества циклов длины 10 в случайном графе равно 0.2.

Каким числом, исходя из неравенства Маркова, можно оценить сверху вероятность того, что в графе цикл на 10 вершинах?

Можно ли улучшить результат леммы о четырёх вершинах степени ≤ 5 — верно ли, что в триангуляции, в которой не менее пяти вершин, найдутся не менее пяти вершин степени ≤ 5 ?

Если нельзя — приведите пример триангуляции, в которой нет пяти вершин малой степени. Если можно — докажите.

Докажите, что при любой раскраске рёбер графа K_n в два цвета в нём найдётся гамильтонов цикл, состоящий из двух одноцветных путей (цвета путей могут быть и одинаковы, и различны).

Приведите пример графа, удовлетворяющего условию теоремы Асратяна—Хачатряна, но не удовлетворяющего условию теоремы Ore.

Докажите, что грани плоского графа, в котором есть гамильтонов цикл, можно правильно раскрасить в 4 цвета (то есть так, чтобы грани, имеющие общую границу ненулевой протяжённости, получили разные цвета).

Какое наименьшее списочное хроматическое число может быть у двусвязного графа на 10^6 вершинах?

Докажите или опровергните (т.е. приведите конкретный контрпример) утверждение: « $\kappa(G) \leq \alpha(G)$ для любого простого графа G , не обладающего гамильтоновым циклом».

Имеется три группы студентов: изучающие испанский, французский и китайский язык. В первых двух группах по пять студентов, в третьей — 205 студентов. Известно, что каждый из изучающих испанский знаком с каждым из изучающих французский, и что каждый из изучающих китайский, знаком по меньшей мере с тремя студентами в каждой из других групп. Докажите, что можно выбрать по три студента из каждой группы, так, чтобы среди выбранных девяти студентов любые два разноязычных студента были знакомы.

На сфере отметили 128 точек и соединили их 378 линиями, так, что получилось изображение некоторого простого графа без пересечений рёбер. После этого все вершины одной из граней построенной укладки раскрасили красным цветом, а все остальные вершины графа раскрасили синим цветом. Докажите, что любую пару синих вершин можно соединить друг с другом цепью, не содержащей красных вершин.

Докажите, что любой неориентированный простой граф G можно так превратить в орграф (нарисовав стрелку на каждом ребре), чтобы в полученном орграфе длины всех простых цепей были ограничены сверху числом $\Delta(G)$. (Длина цепи — это число рёбер в ней.)

Пусть G — двудольный граф с долями A и B , причём все вершины доли A имеют степень $2d$, а все вершины доли B имеют степень d . Докажите, что можно разбить вершины графа G на цепи длины 2, не имеющие общих вершин. (Длина цепи — это число рёбер в ней.)

Средней степенью графа называют среднее арифметическое степеней всех вершин. Докажите, что если средняя степень n -вершинного графа ограничена снизу величиной $n/100$, то списочное хроматическое число графа ограничено снизу по порядку величиной $\Omega(\log n)$.

Докажите, что для любого $k \geq 3$ для произвольных k вершин графа Зыкова—Мыцельского G_{k+1} (имеющего хроматическое число $(k+1)$) можно указать содержащий их простой цикл (разумеется, цикл может включать какие-то ещё вершины помимо выбранных k).

Перечень вопросов к экзамену:

1. Основные определения и понятия.
2. Графические последовательности. Алгоритм определения, графические последовательности и теорема Галлаи-Эрдёша.
3. Связность. Остовное дерево. Различные задачи об остовных деревьях.
4. Простейшие задачи экстремальной теории графов.
5. Число независимости и кликовое число. Теорема Рамсея (напоминание) и (p, q) -свойство. Функция независимости графа. Критерий двудольности и функция независимости. Задачи рамсеевского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
6. Трансверсаль в графе и число независимости. Реберные графы и теорема Галлаи о максимальном парасочетании.
7. Локальные теоремы Галлаи-Эрдёша о числе вершин и теорема Боллобаша о числе рёбер, гарантирующие существование k -трансверсали. Обобщения этих теорем для гиперграфов.
8. Задача Турана. Теорема Моцкина-Стросса. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
9. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов.

Примеры билетов:

Билет 1:

1. Трансверсаль в графе и число независимости. Реберные графы и теорема Галлаи о максимальном парасочетании.
2. Основные определения и понятия.

Билет 2:

1. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов.
2. Связность. Остовное дерево. Различные задачи об остовных деревьях.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.